§1 БАЗЫ ДАННЫХ

Труб И.И.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ BITMAP-ИНДЕКСОВ

Аннотация: *Объектом исследования являются двоичные (bitmap)-индексы как средство повышения эффективности обработки поисковых запросов и построения отчетов в современных СУБД. Предметом исследования является математическая модель зависимости количества индексов, необходимых для построения выборки, удовлетворяющей запросу, от интенсивности добавления записей в базу данных и заданного диапазона значений запроса. Данная характеристика является наиболее значимой для оценки производительности обработки запроса, так как определяет количество операций дизъюнкции над битовыми строками, которое необходимо выполнить для получения результирующей выборки. Данная задача возникла целиком из практических потребностей ввиду критического влияния быстродействия построения отчетов на потребительскую ценность коммерческих продуктов - приложений СУБД. Методологией исследования является вероятностное аналитическое моделирование на основе представления исходных данных в виде пуассоновских процессов, а также использование аппарата математического анализа (интегральное исчисление и суммирование рядов) для получения конечных результатов. Новизна исследования заключается в разработке математической модели, предложенной для данного объекта исследования, которая позволяет ставить широкий спектр задач анализа и оптимизации. Поставленная задача решена - получены формулы для распределения количества индексов и среднего количества индексов в одном запросе. Для каждого результата проведена оценка его достоверности на основе альтернативного подхода или правдоподобных рассуждений. Поставлены задачи построения вероятностной модели для распределений произвольного вида и оптимизации обработки запросов с помощью иерархических bitmap-индексов. Следует отметить, что сформулированная в работе задача и полученные результаты имеют и самостоятельное теоретическое значение в рамках теории массового обслуживания безотносительно к прикладной области.*

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091

При цитировании этой статьи сноска на DOI обязательна

Ключевые слова: *интегрирование и суммирование, уравнения баланса, теория массового обслуживания, Пуассоновский поток, поисковый запрос, база данных, дизъюнкция, двоичные индексы, комбинаторика, анализ и оптимизация*

Abstract: *The study is devoted to bitmap-indexes as a tool of improving efficiency of processing search queries and reporting in the current database. The subject of research is mathematical model of dependence of the number of indexes, required to build a sample that meets the request, on the intensity of adding records to the database and query the specified range of values. This characteristic is most significant for evaluating query processing performance because it determines the number of disjunction operations on bit strings, required to get a result set. This problem arose entirely from the practical needs due to the critical impact of the speed of building of reports on customer value commercial products - database applications. The methodology of this study is probabilistic analytical modeling based on representations of the original data in the form of Poisson process and the use of the apparatus of mathematical analysis (integral calculus and summation rows) to get the final results. The novelty of the research is to develop a suggested mathematical model, which allows to put a wide range of problems of the analysis and optimization. The problem is solved – the author presents the formula for the distribution of the number of indexes, and the average number of indexes in a single query. For each result author evaluated reliability on the basis of an alternative approach or plausible reasoning. The paper sets the tasks of constructing a probabilistic model for the distribution of any type of query processing and optimization using hierarchical bitmap-indexes. It should be noted, that formulated problem and the results obtained have an independent theoretical value within the queuing theory without regard to the application area.*

Keywords: *integration and summation, balance equations, queueing theory, poisons distribution, fetch request, database, combinatorics, disjunction, bitmap-indexes, analysis and optimization*

Введение

Рассмотренная в работе задача изначально была продиктована сугубо практическими потребностями, а именно – недостаточной производительностью обработки поисковых запросов и соответственно построения отчетов крупным коммерческим приложением, работающим на основе постреляционной СУБД Cache [3, 8]. Суть проблемы проста и заключалась в следующем. Имеется некоторая сущность, скажем, «Входящие звонки», экземпляры которой хранятся в отдельной структуре СУБД (для Cache таковой является глобал, но можно представлять ее и таблицей – общая постановка задачи никак не будет привязана к особенностям конкретной СУБД). Одним из атрибутов сущности является время поступления звонка с точностью до секунды, причем упорядоченности записей таблицы по этому атрибуту разработчик ожидать не вправе, т.к. информация о звонке заносится в БД не в момент поступления звонка, а позже – через какое-то время, когда звонок уже завершен. Интенсивность поступления звонков в масштабах всей компании,

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091
При цитировании этой статьи сноска на DOI обязательна

эксплуатирующей приложение, достаточна высока, т.е. объем таблицы велик. Типовым сервисом приложения, востребованным заказчиком, является генерация отчетов по входящим звонкам, причем основным фильтром при задании параметров отчета служит временной диапазон, например, «Вывести информацию обо всех звонках поступивших с такого-то по такое-то время». Т.к. поиск записей, удовлетворяющих такому запросу, с помощью просмотра всей таблицы неприемлем, для повышения производительности используется такой популярный инструментарий современных СУБД как битовые или *bitmap*-индексы (далее будем всюду придерживаться второго варианта написания как терминологически более распространенного).

Напомним, что метод bitmap-индексов заключается в создании отдельных битовых карт (последовательность 0 и 1) для каждого возможного значения столбца, где каждому биту соответствует строка с индексируемым значением, а его значение равное 1 означает, что запись, соответствующая позиции бита, содержит индексируемое значение для данного столбца или свойства. Описание реализации и использования данного метода в Cache можно найти, например, в [10], в Oracle – в [6] и [9]. Для рассматриваемого примера использование технологии bitmap-индексов означает, что для каждого уникального значения времени, в котором зафиксирован хотя бы один звонок, создается битовая строка (индекс), возможно (в случае большого количества записей в таблице) состоящая из нескольких подстрок (chunks). При запросе на отчет берутся все имеющиеся индексы для значений, входящих в заданный пользователем диапазон, и путем их дизъюнкции вычисляется результирующая битовая строка, единицы которой соответствуют номерам записей, удовлетворяющих запросу и выводимых в итоговый отчет.

Однако, эксплуатация приложения показала, что даже применение bitmap-индексов для промышленных масштабов не дает приемлемой для потребителя производительности – отчеты «тормозят». Ключевым параметром является в данном случае количество операций дизъюнкции между битовыми строками, т.е. количество различных индексов, подпадающих под условия фильтра запроса. При большой величине временнОго диапазона в фильтре и высокой интенсивности занесения в БД новых записей оно оказывается очень велико, что и приводит к ощутимой задержке. Но, прежде чем ставить какие-либо задачи оптимизации, следует ответить на вопрос: можно ли каким-то образом оценить это количество индексов, иными словами, можно ли построить более или менее адекватную математическую модель, количественно описывающую эффективность применения bitmap-индексов? Построению такой модели, основанной на теории случайных процессов, и посвящена настоящая работа.

Постановка задачи

Предположим, что занесение новых записей в таблицу базы данных образует поток событий в непрерывном времени, описываемый стационарным случайным процессом с функцией распределения случайной величины X_1 интервала между двумя последовательными событиями $F_1(t)$, а длина временнОго интервала, задаваемого в фильтре за-

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091
При цитировании этой статьи сноска на DOI обязательна

проса на выборку записей, является случайной величиной X_2 с функцией распределения $F_2(t)$. Шкала времени разбита на равные интервалы единичной длины (длина интервала не имеет принципиального значения и может быть параметром модели, играя роль масштабирующего коэффициента). Предположим также для определенности, что начало интервала для X_2 всегда совмещено с началом одного из единичных интервалов времени. Назовем полуоткрытый единичный интервал $[k;k+1)$ *помеченным*, если он содержит хотя бы одно событие из потока X_1. Интерес для нас представляет распределение и характеристики дискретной случайной величины Y, которую опишем как количество помеченных интервалов полностью накрываемых на временнОй шкале случайным интервалом X_2. Таким образом, мы полностью абстрагировались от сути исходной прикладной задачи, переведя ее на язык теории массового обслуживания. Но нетрудно видеть, что случайная величина Y, которую мы собираемся исследовать, как раз и является количеством индексов (дизъюнкций), используемых для вычисления результата запроса.

Методология математического моделирования, которую мы собираемся использовать, является хорошо развитой, изученной и апробированной, но конкретная задача оригинальна. Теоретические основы теории массового обслуживания (queueing theory) изложены в большом количестве учебников и монографий, среди которых автор отдает предпочтение [4]. Применение же этой теории к моделированию вычислительных систем также имеет богатую и давнюю историю, берущую начало от монографий [5] и отечественной [1]. Похожая по тематике и методологии задача рассматривалась в [7].

Разумеется, браться за решение сформулированной задачи сразу в общей постановке для произвольных функций распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ было бы несколько самонадеянно. Как это и принято при изложении классических задач теории массового обслуживания, попытаемся в качестве первого шага получить решение для самого простого случая, а именно:

– поток событий является пуассоновским потоком, т.е. $F_1(t)$=1-$e^{-\lambda t}$, где λ – параметр экспоненциального распределения, называемый интенсивностью потока;
– распределение для случайной величины X_2 также является экспоненциальным с параметром μ, т.е. $F_2(t)$=1-e$^{-\mu t}$.

Замечательное свойство этого распределения, называемое *отсутствием последействия*, позволяет в большинстве случаев получать решение задач в наглядной аналитической форме, и данная задача не будет исключением.

Распределение для накрытых помеченных интервалов

Так как случайные процессы, описанные в постановке задачи, предполагаются стационарными, примем для упрощения выкладок левую границу покрывающего интервала X_2 за начало отсчета времени, т.е. за точку t=0. Введем функцию $P_k(t)$ – вероятность того, что интервал $[0;t]$ длиной t полностью накроет ровно k помеченных единичных интервалов на шкале времени. Тогда искомую вероятность P_k покрытия случайной величиной X_2 ровно k единичных интервалов можно записать как

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091
При цитировании этой статьи сноска на DOI обязательна

$$\int_{k}^{+\infty} P_k(t)\, f_2(t)\, dt \tag{1}$$

где $f_2(t)$ -плотность распределения X_2, для экспоненциального распределения равная $f_2(t) = \mu e^{-\mu t}$. Из свойства отсутствия последействия следует, что вероятности появления или непоявления события в потоке X_1 для каждого единичного интервала независимы и одинаково распределены, т.е.

$$P_k(t) = C_n^k (1 - e^{-\lambda})^k e^{-\lambda(n-k)} \text{ для } n \le t < n+1, n \ge k \tag{2}$$

Формула (2) означает, что ровно на k интервалах произойдет хотя бы одно наступление случайного события, а на остальных n-k интервалах ни одного такого события не будет. Таким образом, $P_\mathrm{k}(t)$ является кусочно-непрерывной функцией, а (1) принимает вид

$$P_k = \sum_{n=k}^{\infty} \int_{n}^{n+1} C_n^k (1 - e^{-\lambda})^k e^{-\lambda(n-k)} \mu e^{-\mu t} dt \tag{3}$$

Заметим, что в справедливости (2) можно убедиться и другим способом. Для целых аргументов запишем достаточно очевидное уравнение баланса

$$P_k(n) = P_k(n\text{-}1)e^{-\lambda} + P_{k-1}(n\text{-}1)(1\text{-}e^{-\lambda})$$

Подставив вместо P_k выражение (2), получим комбинаторное равенство

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

в справедливости которого легко убедиться

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$$

Опустив в (3) элементарные выкладки по вычислению определенного интеграла, получим

$$P_k = \left(e^{\lambda} - 1\right)^k (1 - e^{-\mu}) \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k e^{-(\lambda+\mu)n} \tag{4}$$

В известном справочнике [2] такая сумма отсутствует, но математический анализ обладает достаточно развитой техникой суммирования подобного рода рядов.

Докажем следующее

<u>Утверждение</u>. При a>0 справедливо

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k e^{-an} = \frac{e^{-ak}}{(1 - e^{-a})^{k+1}} \tag{5}$$

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091

Доказательство. Сделаем подстановку $n=i+k-1$, получим сумму

$$e^{-a(k-1)}\sum_{i=1}^{\infty} C_{i+k-1}^{k}\, e^{-ai} = \frac{e^{-a(k-1)}}{k!}\sum_{i=1}^{\infty} i(i+1)\ldots(i+k-1)\, e^{-ai}$$

Таким образом, необходимо просуммировать

$$\sum_{i=1}^{\infty} i(i+1)\ldots(i+k-1)\, x^{i} \qquad (6)$$

где $x=e^{-a}$. Применив технику дифференцирования под знаком суммы, получим для суммы (6)

$$x\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^{i+k-1}\right)^{(k)} = x\left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)}$$

Здесь (k) обозначает производную k-го порядка, а для вычисления суммы использована формула суммирования бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. Возвращаясь к исходной сумме (5), получим

$$\frac{x^k}{k!}\left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)} \qquad (7)$$

Вычислим выражение

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)} \qquad (8)$$

По формуле Лейбница вычисления производной k-го порядка от произведения функций оно преобразуется к виду

$$\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i (x^k)^{(i)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k-i)} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \cdot k\ldots(k-i+1)\,\frac{x^{k-i}}{(1-x)^{k-i+1}}(k-i)!$$

Соберем воедино все целочисленные множители, стоящие под знаком суммы:

$$\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\cdot\frac{(k-i+1)\ldots k\cdot(k-i)!}{k!} = \frac{(k-i+1)\ldots k}{i!} = \frac{k!}{i!\,(k-i)!} = C_k^i$$

Итого для (8) можно записать:

$$\frac{x^k}{1-x}\sum_{i=0}^{k} C_k^i\left(\frac{1}{x}\right)^{i}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k-i} = \frac{x^k}{1-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)^{k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091
При цитировании этой статьи сноска на DOI обязательна

Возвращаясь к (7) и далее подстановкой $x=e^{-a}$ к исходной сумме, получим правую часть (5). Утверждение доказано.■

Теперь подставим полученный результат в (4). Получим окончательную формулу для распределения количества накрытых помеченных интервалов (т.е. индексов или количества дизъюнкций в одном запросе в терминах прикладной задачи):

$$P_k = \frac{1 - e^{-\mu}}{1 - e^{-(\lambda+\mu)}} \cdot \left(\frac{e^{-\mu} - e^{-(\lambda+\mu)}}{1 - e^{-(\lambda+\mu)}}\right)^k \qquad (9)$$

Применив формулу суммирования бесконечной геометрической прогрессии, нетрудно убедиться в том, что сумма по всем k от нуля до бесконечности дает единицу, т.е. множество P_k составляет полную вероятность.

Для нахождения математического ожидания воспользуемся формулой суммирования [2]

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

применив которую к (9), получим

$$Y_{\text{ср}} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{e^{\mu} - 1} \qquad (10)$$

Таким образом, мы получили первый результат, имеющий определенное практическое значение и позволяющий для исходной прикладной задачи дать оценку (пусть и весьма приближенную) трудоемкости вычисления запроса с помощью bitmap-индексов.

Попытаемся оценить достоверность (10). Под оценкой достоверности понимается тот факт, что для некоторого предельного частного случая формула превращается в очевидный, легко выводимый с помощью интуитивных рассуждений результат. Предположим, что $\lambda \to \infty$. Это означает, что интенсивность входного потока настолько высока, что помеченным окажется каждый единичный интервал. В этом случае можно предположить, что при стремлении средней длины $1/\mu$ покрывающего интервала к бесконечности, т.е. при $\mu \to 0$, $Y_{\text{ср}}$ должно стремиться к целой части от $1/\mu$. Проверим, так ли это для (10). Найдем

$$\lim_{\mu \to 0}\left(\frac{1}{e^{\mu} - 1} - \frac{1}{\mu}\right)$$

Дважды применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{\mu \to 0}\frac{\mu - e^{\mu} + 1}{\mu(e^{\mu} - 1)} = \lim_{\mu \to 0}\frac{1 - e^{\mu}}{e^{\mu} - 1 + \mu e^{\mu}} = \lim_{\mu \to 0}\frac{-e^{\mu}}{2e^{\mu} + \mu e^{\mu}} = -\frac{1}{2}$$

Результат абсолютно логичен, т.к. для всех $1/\mu$, попадающих в интервал $[n;n+1)$, $Y_{\text{ср}}$ при $\lambda \to \infty$ одинаково и равно n. Следовательно, в среднем целая часть от $1/\mu$ меньше самого значения $1/\mu$ как раз на $1/2$, т.е. частный случай (10) совпал с интуитивно ожидаемым.

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091

Заключение

Полученные результаты являются первыми в разработке научных основ анализа, синтеза и оптимизации программных систем, построенных на основе bitmap-индексов. В качестве дальнейших шагов, которые явились бы логичным продолжением данной работы, можно было бы выделить постановку и решение следующих задач:

1. Анализ: получение функции распределения количества индексов для произвольных функций распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Трудность здесь в первую очередь представляет произвольность распределения для $F_1(t)$, т.к. формула (2) теряет силу.
2. Обобщение: распространение разработанной методики моделирования для случая построения индекса по атрибуту, не являющимся временем. Получение такого обобщения не представляет принципиальных затруднений, если потребовать наличия отношения порядка на множестве значений этого атрибута, хотя и теряет содержательность, если количество возможных значений атрибута невелико.
3. Синтез и оптимизация: построение иерархической системы вложенных индексов, позволяющей сократить количество дизъюнкций в запросе и дающей оптимальное решение для некоторого критерия оптимизации, равно как и формулировка самих этих критериев.

Следует отметить, что помимо приложений для автоматизации бизнеса (таких, например, как электронный документооборот), существуют прикладные области, для которых рассмотренная в работе задача является еще более актуальной. В качестве примера можно привести автоматизацию рабочего места диспетчера в газовой промышленности, где в системах мониторинга состояния оборудования, в частности, компрессорных станций, интенсивность потока занесения в базу данных записей об инцидентах может во много раз превышать интенсивность потока входящих звонков в бизнес-подразделениях крупной компании.

Библиография :

1. Артамонов Г.Т., Брехов О.М. Аналитические вероятностные модели функционирования ЭВМ. М.: Энергия, 1978. 368 с.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 1100 с.
3. Кирстен В., Ирингер М., Кюн М., Рериг Б. СУБД Cache 5: объектно-ориентированная разработка приложений. 2-е изд. М.: Бином, 2005. 416 с.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
5. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. 595 с.
6. СУБД Oracle. Администрирование, разработка и программирование. Индексы. URL: http://oracledb.ru/sql/ddl-i-obekty-sxemy/indeksy.html (дата обращения 16.11.2016)

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091
При цитировании этой статьи сноска на DOI обязательна

7. Труб И.И. Об оптимальной стратегии генерирования результатов запросов к Internet-серверу баз данных // Автоматика и телемеханика. 2003. № 6. С. 95-103.
8. Труб И.И. СУБД Cache: работа с объектами. М.: Диалог-МИФИ, 2006. 480 с.
9. Шарма В. Bitmap-индекс или B*tree-индекс: какой и когда применять? URL: http://citforum.ru/database/oracle/bb_indexes/ (дата обращения 16.11.2016)
10. Bitmap-индексы в Cache на глобалах. URL: https://habrahabr.ru/company/intersystems/blog/174657/ (дата обращения 16.11.2016)

References:

1. Artamonov G.T., Brekhov O.M. Analiticheskie veroyatnostnye modeli funktsionirovaniya EVM. M.: Energiya, 1978. 368 s.
2. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii. 4-e izd. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1963. 1100 s.
3. Kirsten V., Iringer M., Kyun M., Rerig B. SUBD Cache 5: ob"ektno-orientirovannaya razrabotka prilozhenii. 2-e izd. M.: Binom, 2005. 416 s.
4. Kleinrok L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya. M.: Mashinostroenie, 1979. 432 s.
5. Kleinrok L. Vychislitel'nye sistemy s ocheredyami. M.: Mir, 1979. 595 s.
6. SUBD Oracle. Administrirovanie, razrabotka i programmirovanie. Indeksy. URL: http://oracledb.ru/sql/ddl-i-obekty-sxemy/indeksy.html (data obrashcheniya 16.11.2016)
7. Trub I.I. Ob optimal'noi strategii generirovaniya rezul'tatov zaprosov k Internet-serveru baz dannykh // Avtomatika i telemekhanika. 2003. № 6. S. 95-103.
8. Trub I.I. SUBD Cache: rabota s ob"ektami. M.: Dialog-MIFI, 2006. 480 s.
9. Sharma V. Bitmap-indeks ili B*tree-indeks: kakoi i kogda primenyat'? URL: http://citforum.ru/database/oracle/bb_indexes/ (data obrashcheniya 16.11.2016)
10. Bitmap-indeksy v Cache na globalakh. URL: https://habrahabr.ru/company/intersystems/blog/174657/ (data obrashcheniya 16.11.2016)

DOI: 10.7256/2305-6061.2016.4.21091