

Галанина Н.А., Дмитриев Д.Д., Ахметзянов Д. И. 

---

## АЛГОРИТМ ГЕРЦЕЛЯ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

**Аннотация:** В данной статье приведены результаты программной реализации алгоритма Герцеля для определения сдвига фаз между двумя синусоидальными сигналами. Показано практическое применение алгоритма Герцеля для расчета активной составляющей  $R$  комплексного сопротивления  $Z$  фильтра. Отмечается, что алгоритм Герцеля реализуется в форме фильтра с бесконечно-импульсной характеристикой (БИХ-фильтра) второго порядка с двумя действительными коэффициентами обратной связи и одним комплексным коэффициентом в цепи прямой связи. Моделирование проводилось в системе компьютерной алгебры Mathcad. Говорится, что алгоритм Герцеля позволяет эффективно рассчитывать фиксированные спектральные отсчеты ДПФ без необходимости рассчитывать все ДПФ. Говорится, что алгоритм Герцеля достаточно эффективно справляется с вычислением спектральных составляющих при достаточно высоких частотах дискретизации, а также при правильном определении числа выборок. В программе Mathcad получена модель, показывающая работоспособность данного алгоритма. С помощью полученной модели были найдены наиболее оптимальные параметры для последующей практической реализации алгоритма Герцеля.

**Ключевые слова:** алгоритм Герцеля, сдвиг фаз, синусоидальные сигналы, комплексное сопротивление, обратная связь, цепь прямой связи, Mathcad, моделирование, выборки, фиксированные спектральные отсчеты

### Краткое описание алгоритма Герцеля

Алгоритм Герцеля реализуется в форме фильтра с бесконечно-импульсной характеристикой (БИХ - фильтра) второго порядка с двумя действительными коэффициентами обратной связи и одним комплексным коэффициентом в цепи прямой связи, как показано на рис. 1<sup>1</sup>.

---

1 Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. – 656 с.: ил.

## Алгоритм Герцеля для спектрального анализа сигналов

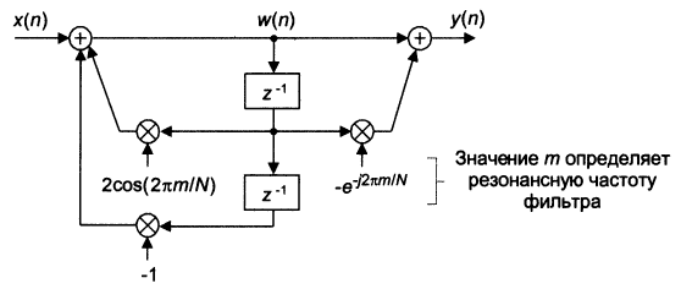


Рис. 1 - Реализация БИХ – фильтра алгоритма Герцеля

Хотя приведенная структура не используется в качестве традиционного фильтра, принято называть ее фильтром. Этот фильтр вычисляет значение единственного отсчета дискретного преобразования Фурье (ДПФ),  $m$ -й отсчет  $N$  – точечного ДПФ, который определяется как

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \quad (1)$$

Выходной сигнал фильтра  $y(n)$  равен отсчету ДПФ  $X(m)$  в момент времени  $n=N$ , если индекс первого отсчета  $n=0$ . Чтобы результат был эквивалентен ДПФ, индекс в частотной области  $m$  должен быть целым числом в диапазоне  $0 \leq m \leq N-1$ <sup>2</sup>.

### Обоснование выбора алгоритма Герцеля

Алгоритм Герцеля позволяет эффективно рассчитывать фиксированные спектральные отсчеты ДПФ без необходимости рассчитывать все ДПФ. Далее приведены ряд преимуществ алгоритма Герцеля перед стандартным Быстрым преобразованием Фурье (БПФ) по основанию 2<sup>3</sup>:

1. Число выборок не обязательно должно быть равно одной из степеней числа 2.
2. Объем памяти коэффициентов фильтра меньше, чем объем памяти поворачивающих множителей.
3. Не требуется накопление данных до начала вычисления (как в случае БПФ). Обработка может начинаться с приходом первого входного отсчета.
4. Алгоритм Герцеля не требует бит-реверсивной сортировки.
5. Если алгоритм Герцеля реализуется  $M$  раз для обнаружения  $M$  разных спектральных составляющих, то он более эффективен (требует меньше умножений), чем БПФ, при  $M < \log_2 N$ .

### Результаты моделирования

Моделирование проводилось в системе компьютерной алгебры Mathcad. При моделировании сдвиг фаз  $\varphi_{зад}$  между сигналами  $U_1$  и  $U_2$  задавался изначально и далее

<sup>2</sup> Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. – 656 с.: ил.

<sup>3</sup> Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. – 656 с.: ил.

заданный сдвиг фаз сравнивался с расчетным сдвигом фаз  $\varphi_{расч}$ , полученным с помощью алгоритма Герцеля. В ходе моделирования было выяснено, что наиболее оптимальным является число выборок, найденное по формуле

$$N_{выб} = \frac{f_{дискр}}{f_{раб}} \quad (2)$$

Если брать иное количество выборок то результат расчета сдвига фаз между сигналами  $U_1$  и  $U_2$  не соответствует действительному, это видно по табл. 3.

Таблица 3

Число выборок, $N_{выб}$	Расчетная фаза, $\varphi_{расч}$ , рад	Частота дискретизации, $f_{дискр}$ , МГц	Рабочая частота, $f_{раб}$ , кГц	Заданная фаза, $\varphi_{зад}$ , рад
40	0,174	2,5	100	0,348
19	0,388			
25*	0,348			

Примечание: \* - оптимальное число выборок, полученное по формуле (2).

При малых частотах дискретизации, возможно неправильное определение сдвига фаз по алгоритму Герцеля, табл. 4.

Таблица 4

Число выборок, $N_{выб}$	Расчетная фаза, $\varphi_{расч}$ , рад	Частота дискретизации, $f_{дискр}$ , МГц	Рабочая частота, $f_{раб}$ , кГц	Заданная фаза, $\varphi_{зад}$ , рад
3	0,295	2,5	1000	0,348

Если частоту дискретизации увеличить до 6 МГц, то точность расчета увеличивается и становится удовлетворительной нашим требованиям, табл. 5.

Таблица 5

Число выборок, $N_{выб}$	Расчетная фаза, $\varphi_{расч}$ , рад	Частота дискретизации, $f_{дискр}$ , МГц	Рабочая частота, $f_{раб}$ , кГц	Заданная фаза, $\varphi_{зад}$ , рад
6	0,348	6	1000	0,348

## Алгоритм Герцеля для спектрального анализа сигналов

Также в ходе моделирования было получено, что при измерении, фазы обоих сигналов ( $U_1$  и  $U_2$ ) могут быть произвольными и не обязательно фазы сигналов должны быть нулевыми. Например, если

$$\begin{aligned} U_1 &= \sin(\omega t - 0,147), \\ U_2 &= \sin(\omega t - 0,348). \end{aligned} \quad (3)$$

то при таких сигналах, когда фаза обоих сигналов не равна нулю, алгоритм Герцеля также корректно определяет сдвиг фаз

$$\varphi_{расч} = 0,147. \quad (4)$$

Т.о. по результатам моделирования можно сказать, что алгоритм Герцеля достаточно эффективно справляется с вычислением спектральных составляющих при достаточно высоких частотах дискретизации, а также при правильном определении числа выборок (по формуле (2)).

### Практическая реализация алгоритма Герцеля

Покажем применение алгоритма Герцеля для нахождения активной составляющей  $R$  комплексного сопротивления  $Z$  фильтра. На рис. 2 показана упрощенная схема для нахождения искомого сопротивления  $R$ .

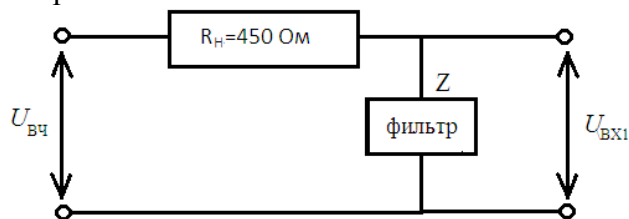


Рис. 2 – Упрощенная схема для нахождения активного сопротивления  $R$  фильтра

На рис. 2  $U_{ВЧ}$  – выходное напряжение с высокочастотного генератора (ВЧ),  $U_{ВХ1}$  – входное напряжение измерителя,  $Z$  – комплексное сопротивление фильтра, включающее активную  $R$  и реактивную  $X$  составляющую,  $R_H = 450 \text{ Ом}$  – нагрузочное сопротивление.

$U_{ВЧ}$  и  $U_{ВХ1}$  – являются известными среднеквадратичными значениями. Определим комплексное сопротивление  $Z$ .

Выразим входное напряжение измерителя  $U_{ВХ1}$  через комплексное сопротивление  $Z$  и выходное напряжение ВЧ генератора  $U_{ВЧ}$

$$U_{ВХ1} = U_{ВЧ} \frac{Z}{Z + R_H}. \quad (5)$$

Выразив из выражения (5) комплексное сопротивление  $Z$  получим

$$Z = \frac{R_{\Phi} \cdot U_{\text{ВХ1}}}{U_{\text{ВЧ}} - U_{\text{ВХ1}}} \quad (6)$$

Таким образом, чтобы найти комплексное сопротивление  $Z$ , необходимо знать среднеквадратичные значения  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВЧ}}$ . Отсюда можно найти активную составляющую комплексного сопротивления  $Z$

$$R = Z \cdot \cos(\varphi). \quad (7)$$

Из выражения (7) видно, что для нахождения активной составляющей необходимо определить помимо комплексного сопротивления  $Z$  еще и сдвиг фаз  $\varphi$  между двумя сигналами  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВЧ}}$ .

Исходя из этого, для нахождения сдвига фаз  $\varphi$ , воспользуемся уже описанным выше алгоритмом Герцеля. Рассчитаем сдвиг фаз между сигналами  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВЧ}}$ , выдаваемыми с прибора Ретом-ВЧ/64. На рис. 3 изображена схема подключения прибора Ретом-ВЧ/64, описанная выше на рис. 2.

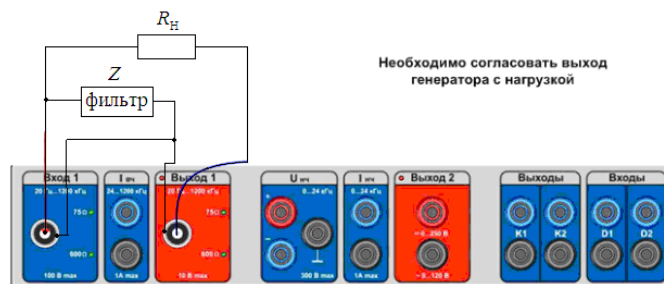


Рис. 3 – Схема подключения ВЧ генератора к измерителю Вход 1

Сигналы  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВЧ}}$  синусоидальные. При снятии фазо-частотной характеристики (ФЧХ) частота сигнала генератора изменяется в диапазоне от 24 кГц до 1 МГц с фиксированным шагом. Для каждой выдаваемой частоты снимаются показания со Входа 1 прибора и вычисляется фазовый сдвиг по алгоритму Герцеля.

На рис. 4 показаны формы сигналов с АЦП Выхода 1 (сигнал с ВЧ генератора  $U_{\text{ВЧ}}$ ).

На рис. 5 показаны результаты расчета фазового сдвига между сигналами  $U_{\text{ВХ1}}$  и  $U_{\text{ВЧ}}$  при изменении частоты  $U_{\text{ВЧ}}$  от 24 кГц до 245 кГц. Переход через 0 осуществляется на частоте 112324 Гц.

## Алгоритм Герцеля для спектрального анализа сигналов

На рис. 6 график изменения активной составляющей  $R$  комплексного сопротивления  $Z$  фильтра от частоты. Активная составляющая рассчитывается по формуле (7).

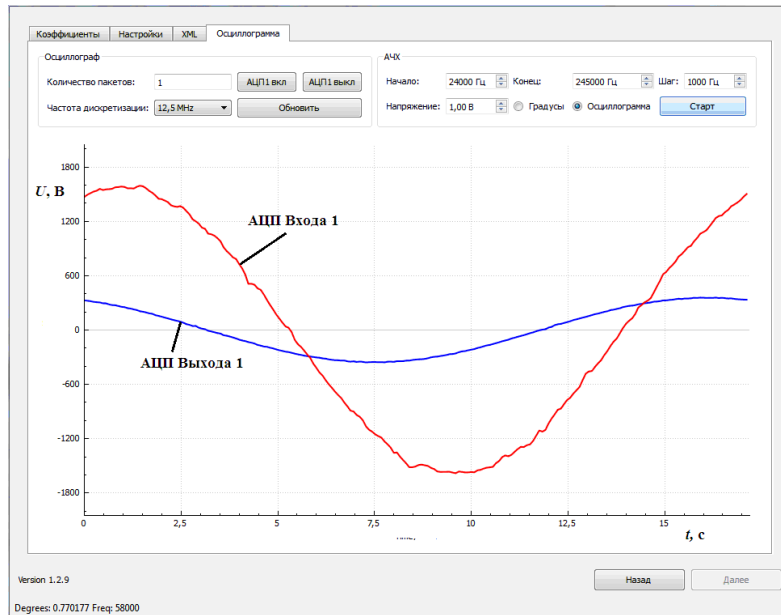


Рис. 4 - Сигналы, полученные с АЦП Выхода 1 и Входа 1 на рабочей частоте 58 кГц

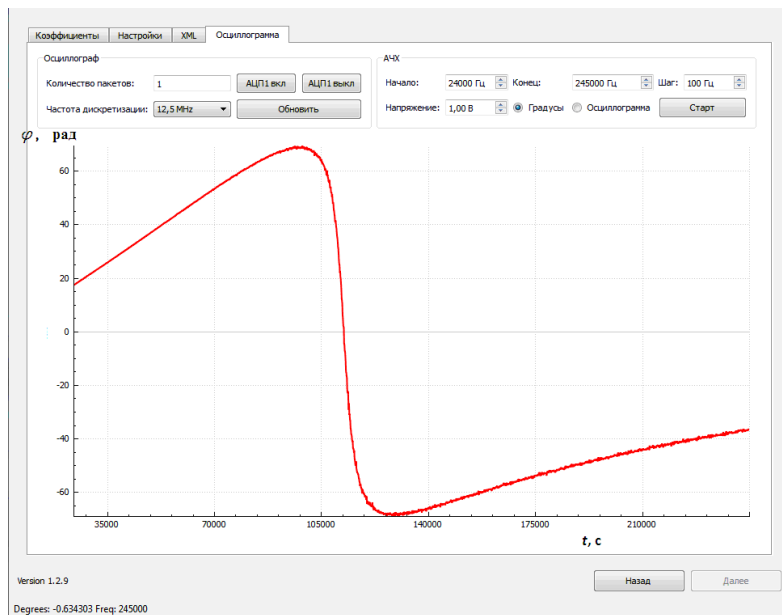


Рис. 5 - ФЧХ фильтра в диапазоне от 24 кГц до 245 кГц

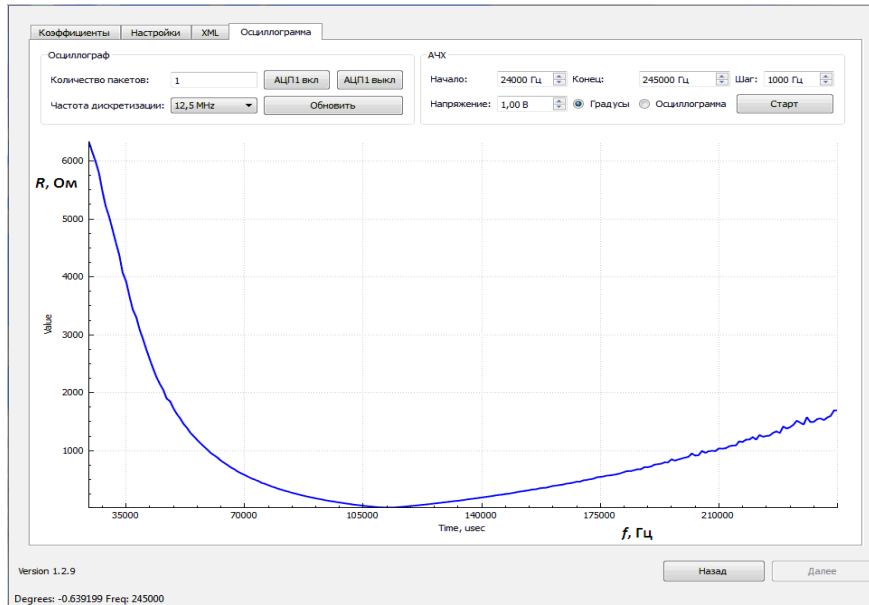


Рис. 6 - Зависимость активной составляющей  $R$  комплексного сопротивления  $Z$  фильтра от частоты

Т.о. получена практическая реализация алгоритма Герцеля, с помощью которой удалось рассчитать сдвиг фаз между сигналами  $U_{ВХ1}$  и  $U_{ВЧ}$ . Фазовый сдвиг позволяет вычислять активную составляющую комплексного сопротивления  $Z$  фильтра, без его непосредственного измерения.

### Выводы по работе

В ходе проделанной работы, был рассмотрен алгоритм Герцеля, приведено его краткое описание, а также обоснование выбора данного алгоритма.

В программе Mathcad получена модель, показывающая работоспособность данного алгоритма. С помощью полученной модели были найдены наиболее оптимальные параметры для последующей практической реализации алгоритма Герцеля..

Практически, была выполнена задача расчета активной составляющей  $R$  комплексного сопротивления  $Z$  фильтра при известном значении комплексного сопротивления и сдвиге фаз между сигналами  $U_{ВХ1}$  и  $U_{ВЧ}$ . Сдвиг фаз был найден с помощью алгоритма Герцеля.

Исходя из этого, можно сказать, что теоретические расчеты по нахождению фазового сдвига между сигналами  $U_{ВХ1}$  и  $U_{ВЧ}$  по алгоритму Герцеля достаточно точно совпадают с практическими расчетами по данному алгоритму.

## Алгоритм Герцеля для спектрального анализа сигналов

---

### Библиография:

1. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. – 656 с.: ил.
2. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008. – 992с.: ил. – Парал. тит. англ.

### References:

1. Tsifrovaya obrabotka signalov: Vtoroe izdanie. Per. s angl. – М.: ООО «Binom-Press», 2006 g. – 656 s.: il.
2. Tsifrovaya obrabotka signalov: prakticheskii podkhod, 2-e izdanie.: Per. s angl. – М.: Izdatel'skii dom «Vil'yams», 2008. – 992s.: il. – Paral. tit. angl.